

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă Locală, 17 februarie 2024****Clasa a VIII-a****Problema 1**

- a) Arătați că numărul  $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023} + \sqrt{2025}}$  este natural.
- b) Demonstrați că  $\frac{1}{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{1})} + \frac{1}{\sqrt{15} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1} \cdot (\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} < \frac{1}{2}$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .

**Problema 2**

În tetraedrul  $ABCD$  muchiile opuse sunt congruente, două câte două.

- a) Demonstrați că ariile celor patru fețe ale tetraedrului sunt egale.
- b) Arătați că  $m(\angle ABD) + m(\angle CBD) + m(\angle ABC) = 180^\circ$ .
- c) Dacă, în plus,  $AD \perp BC$ , atunci arătați că  $AD \perp (BCM)$ , punctul  $M$  fiind mijlocul laturii  $AD$ .

**Problema 3**

Se consideră cubul  $ABCD A'B'C'D'$ , centrul  $O$  al feței  $ABCD$ , iar punctele  $M$  și  $N$  sunt mijloacele muchiilor  $AB$ , respectiv  $BC$ . Arătați că:

- a) dreptele  $D'B$ ,  $A'N$ ,  $C'M$  și  $B'O$  sunt concurente;
- b) patrulaterul  $MNC'A'$  are diagonalele perpendiculare.

**S.G.M. nr.10 / 2023****Problema 4**

Determinați numerele reale pozitive  $x, y$  și  $z$  astfel încât să aibă loc simultan relațiile:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2(x^2 + y^2) + y^2(y^2 + z^2) + z^2(z^2 + x^2) = 6xyz \end{cases}$$

**Notă:** Timp de lucru: 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 0 la 7. Nu se acordă puncte din oficiu.